

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ**

**ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**



**Κεφάλαιο 1ο:****ΤΡΙΠΩΝΟΜΕΤΡΙΑ****Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”**

1.	Σ
2.	Λ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Σ

9.	Σ
10.	Σ
11.	Σ
12.	Λ
13.	Λ
14.	Σ
15.	Λ
16.	Λ
17.	Σ

18.	Λ
19.	Λ
20.	Σ
21.	Σ
22.	Λ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Σ

**Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**

1.	Ε
2.	Δ
3.	Ε
4.	Β
5.	Γ
6.	Γ
7.	Ε
8.	Δ
9.	Δ

10.	Γ
11.	Γ
12.	Δ
13.	Γ
14.	Γ
15.	Ε
16.	Β
17.	Ε
18.	Β
19.	Ε

20.	Δ
21.	Δ
22.	Δ
23.	Δ
24.	Α
25.	Ε
26.	Γ
27.	Δ
28.	Ε

**Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης**

1.

1	E
2	H
3	Z
4	Γ
5	B
6	Δ

2.

1	Z
2	E
3	A
4	Γ

3.

1	E
2	Z
3	B
4	H

4.

1	Γ
2	Z
3	Δ
4	H

5.

1	B
2	E
3	Γ

6.

1	B
2	E
3	Z

**Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης**

1. **a)**  $x = 360^\circ \cdot k - 25^\circ$  ή  $x = 360^\circ \cdot k + 205^\circ$

**β)**  $x = 360^\circ \cdot k - 20^\circ$  ή  $x = 120^\circ \cdot k + \frac{1}{3} \cdot 160^\circ$

**γ)** αδύνατη

$$k \in \mathbb{Z}$$

**δ)**  $\sin(x + 50^\circ) = \sin(70^\circ - x)$  κλπ.

**ε)**  $x = 360^\circ \cdot k \pm 150^\circ$

**ζ)**  $\sigma \varphi x = 1$ , άρα  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  ή  $\sigma \varphi x = -1$ , άρα  $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

**2. α)  $C_2$ :  $y = \eta\mu 2x$**

**β) Για την  $C_1$ :  $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  Για την  $C_2$ :  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$**

**γ)  $\eta\mu x = \eta\mu 2x$ , αρα  $x = 2k\pi$  ή  $3x = 2k\pi + \pi$  για  $k = 0, 1, 2, \dots$**

**3.  $\eta\mu(57^\circ - 12^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$**

**4. α)  $\varepsilon\phi(45^\circ - \omega) = \frac{1 - \varepsilon\phi\omega}{1 + \varepsilon\phi\omega}$  και  $\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega}$**

**β) Εφαρμογή των τύπων**

**5. α) Εφαρμογή του τύπου του συν  $(\alpha + \beta)$  και  $\sin 120^\circ = \sin 240^\circ = -\frac{1}{2}$ ,**

$$\eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \eta\mu 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**6. Εφαρμογή των τύπων και παραγοντοποίηση**

**7.  $\varepsilon\phi(\alpha + \beta) = 1$ , αρα  $\frac{\frac{1}{3} + \varepsilon\phi\beta}{1 - \frac{1}{3}\varepsilon\phi\beta} = 1$  και  $\varepsilon\phi\beta = \frac{1}{2}$**

**8. Όμοια με την άσκηση 7**

9.  $\varepsilon\varphi x = 3 + 2\sqrt{2}$  άρα  $\varepsilon\varphi(x - y) = \frac{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi y}{1 + \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi y} = \frac{6 + 3\sqrt{2}}{6 + 3\sqrt{2}} = 1$ ,

$$\text{δηλαδή } x - y = \frac{\pi}{4}$$

10. Παρατηρούμε ότι  $\varepsilon\varphi B = \frac{1}{2}$  και  $\varepsilon\varphi \Gamma = \frac{1}{3}$ , άρα  $\varepsilon\varphi(B + \Gamma) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$ ,

άρα  $B + \Gamma = 45^\circ$ , άρα  $A = 135^\circ$

11. α)  $\eta\mu^2x + \eta\mu^2y + 2\eta\mu x\eta\mu y = \kappa^2$  και  $\sigma v^2x + \sigma v^2y + 2\sigma vx\sigma vy = \lambda^2$   
με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η ζητούμενη σχέση

β)  $\sigma v(x - y) = \frac{1}{2}$

12.  $\sigma v(\alpha + \beta) = \sigma v \alpha \sigma v \beta$ , άρα  $\eta\mu \alpha \eta\mu \beta = 0$ , δηλαδή  $\eta\mu \alpha = 0$  και  $\sigma v \alpha = 1$  ή  $\eta\mu \beta = 0$  και  $\sigma v \beta = 1$ , σε κάθε περίπτωση ισχύει η αποδεικτέα

13. Για το α' μέλος να εφαρμόσετε τον τύπο  $\sigma v \alpha \sigma v \beta - \eta\mu \alpha \eta\mu \beta = \sigma v(\alpha + \beta)$ .

14.  $\sigma v(\alpha + \beta) \sigma v(\alpha - \beta) = \sigma v^2 \alpha \sigma v^2 \beta - \eta\mu^2 \alpha \eta\mu^2 \beta$  και  $\eta\mu^2 \alpha = 1 - \sigma v^2 \alpha$ ,  $\eta\mu^2 \beta = 1 - \sigma v^2 \beta$

15. α)  $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \varepsilon\varphi(90^\circ - \gamma) = \sigma\varphi\gamma = \frac{1}{\varepsilon\varphi\gamma}$  και εφαρμογή του τύπου της

$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$

β) Αν στην ταυτότητα του (α) ερωτήματος θέσουμε  $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{\sigma\varphi\alpha}$ ,

$\varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{\sigma\varphi\beta}$  και  $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{1}{\sigma\varphi\gamma}$ , προκύπτει η (β)

**16.**  $\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \epsilon\phi\gamma$  και ανάπτυξη της ταυτότητας

**17.**  $\eta\mu\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$  και  $\eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\sin\theta$

**18. a)** Εφαρμογή των τύπων του διπλάσιου τόξου

**β)** Το πρώτο μέλος είναι το  $\frac{1}{\epsilon\phi^2 x}$

**γ)**  $\frac{\eta\mu^3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon^3\alpha}{\sigma\upsilon\alpha} = 2 \frac{\eta\mu^3\alpha\sigma\upsilon\alpha - \eta\mu\alpha\sigma\upsilon^3\alpha}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha} = \frac{2\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = 2$

**19.**  $\sigma\upsilon^4 4\alpha - \eta\mu^4 4\alpha = (\sigma\upsilon^2 4\alpha - \eta\mu^2 4\alpha) 1 = \sigma\upsilon 8\alpha$

**20. a)** Να χρησιμοποιήσετε τους τύπους για τις  $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$  και  $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$

και ότι  $\epsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$

**β)** Να εκφράσετε τα  $\eta\mu 2\theta$  και  $\sigma\upsilon 2\theta$  με  $\eta\mu\theta$  και  $\sigma\upsilon\theta$ .

**γ)** Να εκφράσετε τα  $\eta\mu 4\alpha$  και  $\sigma\upsilon 4\alpha$  με  $\eta\mu 2\alpha$  και  $\sigma\upsilon 2\alpha$ .

**21.** Το πρώτο μέλος γράφεται  $\frac{\epsilon\phi 2\alpha + \epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi 2\alpha\epsilon\phi\alpha} \frac{\epsilon\phi 2\alpha - \epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi 2\alpha\epsilon\phi\alpha} = \epsilon\phi 3\alpha\epsilon\phi\alpha$

**22.** Να εκφράσετε πρώτα το  $\eta\mu 2\alpha$  και το  $\sigma\upsilon 2\alpha$  με  $\eta\mu\alpha$  και  $\sigma\upsilon\alpha$  χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες:  $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha$  και  $1 + \sigma\upsilon 2\alpha = 2\sigma\upsilon\alpha$ , και μετά το

$\eta\mu\alpha$  και το  $\sigma\upsilon\alpha$  με  $\eta\mu \frac{\alpha}{2}$  και  $\sigma\upsilon \frac{\alpha}{2}$ .

23.  $\frac{\sigma\varphi\alpha + 1}{\sigma\varphi\alpha - 1} = \frac{\sigma\text{un}\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\text{un}\alpha - \eta\mu\alpha} = \frac{\sigma\text{un}^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{(\sigma\text{un}\alpha - \eta\mu\alpha)^2} = \frac{\sigma\text{un}2\alpha}{1 - \eta\mu2\alpha}$

24. ζ)  $\sigma\text{un}x = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{x}{2}$ , οπότε προκύπτει τριώνυμο ως προς  $\eta\mu \frac{x}{2}$

θ) Χρησιμοποιούμε τους τύπους για τις εφ  $(\alpha + \beta)$  και εφ  $(\alpha - \beta)$  και προκύπτει δευτεροβάθμια εξίσωση.

25. α) Να κάνετε τα αθροίσματα γινόμενα

β) Να ομαδοποιήσετε τα αθροίσματα και να τα μετατρέψετε σε γινόμενα.

26. Από τη δοσμένη προκύπτει:  $2\sigma\text{un} \frac{A+B}{2} \sigma\text{un} \frac{A-B}{2} = 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\text{un} \frac{\Gamma}{2}$ , αλλά  $\sigma\text{un} \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$ , άρα  $2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} [\sigma\text{un} \frac{A-B}{2} - \sigma\text{un} \frac{\Gamma}{2}] = 0$ , άρα  $A - B = \Gamma$ , δηλαδή  $B + \Gamma = A = 90^\circ$

27. α)  $B\Gamma = 8\eta\mu\omega$ ,  $\Gamma\Delta = 8\sigma\text{un}\omega$

β)  $B\Gamma + \Gamma\Delta = 8 (\eta\mu\omega + \sigma\text{un}\omega) = 8\sqrt{2} \eta\mu (\frac{\pi}{4} + \omega)$ . Η παράσταση μεγιστο-

ποιείται όταν  $\eta\mu (\frac{\pi}{4} + \omega) = 1$ , δηλαδή όταν  $\omega = \frac{\pi}{4}$

29.  $\eta\mu2x + \sigma\text{un}2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sqrt{2} \eta\mu (2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu (2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu (2x + \frac{\pi}{4}) = \eta\mu \frac{\pi}{6} \text{ κ.τ.λ.}$$

**31. α)** Η επίκεντρη γωνία η αντίστοιχη της  $A$  είναι  $120^\circ$ , άρα  $\hat{A} = 60^\circ$ . Όμως

$$\hat{\Gamma} = 50^\circ, \text{άρα } \hat{B} = 70^\circ$$

$$\beta) R = 4, \text{άρα } \alpha = 8\pi/60^\circ, \beta = 8\pi/70^\circ, \gamma = 8\pi/50^\circ$$

$$\gamma) E = \frac{1}{2} \beta \gamma \mu A = 32\pi/70^\circ \cdot \pi/50^\circ \cdot \pi/60^\circ$$

**32. α)** Στο τρίγωνο  $ABM$ :  $\gamma^2 = \mu_a^2 + BM^2 - 2\mu_a \cdot BM \cdot \sin \omega$

$$\Sigma \text{τρίγωνο } AMG: \beta^2 = \mu_a^2 + MG^2 - 2\mu_a \cdot MG \cdot \sin(\pi - \omega)$$

και πρόσθεση κατά μέλη

$$\beta) \Sigma \text{τρίγωνο } AB\Delta \text{ ισχύει: } \frac{B\Delta}{\eta\mu\omega} = \frac{AB}{\eta\mu\phi}$$

$$\Sigma \text{τρίγωνο } A\Delta G \text{ ισχύει: } \frac{\Delta G}{\eta\mu\omega} = \frac{AG}{\eta\mu(\pi - \phi)}$$

και διαιρούμε κατά μέλη

**33.** Αρκεί να υπολογιστεί το  $A\Delta$ , όπου  $\Delta$  η προβολή του σημείου  $A$  στην  $BG$ .

$$\Sigma \text{τρίγωνο } A\Delta G \text{ ισχύει: } A\Delta = AG \cdot \eta\mu\theta$$

$$\Sigma \text{τρίγωνο } ABG \text{ ισχύει: } \frac{AG}{\eta\mu\phi} = \frac{BG}{\eta\mu\omega} = \frac{x}{\eta\mu(\theta - \phi)}, \text{ άρα } AG = \frac{x\eta\mu\phi}{\eta\mu(\theta - \phi)},$$

$$\text{οπότε } A\Delta = \frac{x\eta\mu\phi\eta\mu\theta}{\eta\mu(\theta - \phi)}$$

**34.** Στο τρίγωνο  $A\Delta G$  ισχύει:  $\hat{A} = 60^\circ$ , άρα  $\Gamma\Delta = AG \cdot \eta\mu 60^\circ$ .

Αρκεί να υπολογιστεί η  $AG$ .

$$\Sigma \text{τρίγωνο } ABG \text{ ισχύει: } \frac{1200}{\eta\mu 30} = \frac{AG}{\eta\mu B}, \text{ όμως } \hat{B} = 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ,$$

$$\text{άρα } \eta\mu B = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Τελικά } \Gamma\Delta = 1200 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{6}$$

